LIMO

Leiden

vrijdag
3 juni
2005

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade

Opgaven

www.deleidscheflesch.nl/limo

Mathematisch Instituut
Thomas Stieltjes Institute for Mathematics
KWG
Leids Universiteits Fonds
KNAW
NWO Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
ING
Mathematical Research Institute MRI

TU/e technische universiteit eindhoven

Nagedacht over je carrière?

Wil je meewerken aan technologische vernieuwingen voor onze maatschappij, stroom dan door in de masteropleiding

Industrial and Applied Mathematics

en verdiep je in de wereld van de toepassingen en het wiskundig modelleren

Kies vanaf het begin je specialisatie:

- **Computational Science and Engineering**
  Complexe natuurkundige en technische processen analyseren en simuleren
- **Discrete Mathematics and Applications**
  Van crystallografische roosters tot optimalisering van netwerken en chips, van computeralgebra tot cryptografische schema's
- **Statistics, Probability, and Operations Research**
  Modellering, analyse en optimalisatie van deterministische en toevallige processen

Meer info: www.win.tue.nl/iam

Voorwoord

Dit jaar is er voor het eerst in Leiden een universitaire wiskundeolympiade georganiseerd, de LIMO. Dit is uiteraard een speciale gebeurtenis en we hebben er allen hard aan gewerkt om deze dag een groot succes te laten worden. We hopen dat deze dag als voorbeeld kan dienen voor nog vele jaren LIMO in de toekomst.

We hopen natuurlijk dat het vandaag een leuke en gezellige dag wordt, maar deze olympiade is ook bedoeld om studenten van alle verschillende universiteiten wat dichter bij elkaar te brengen en zich qua wiskundekennis met elkaar te laten meten.

In dit boekje staan alle opgaven voor LIMO 2005. Aangezien het aanbod van leerstof aan de universiteiten in de eerste paar jaar vaak erg verschillend is, hebben we opgavemakers van verschillende universiteiten en uit verschillende vakgebieden gevraagd. Wij zijn hen zeer erkentelijk voor hun medewerking.

De opgaven zijn pittig, werk dus goed samen en verdeel je tijd goed. In verband met snel nakijken is het belangrijk dat elke opgave op een apart blad wordt gemaakt. Nadat de opgaven gemaakt zijn willen we zo snel mogelijk naar de uitreiking van de zo begeerde prijzen.

Het gebruik van een grafische rekenmachine is toegestaan. Boeken en elektronische hulpmiddelen geavanceerder dan grafische rekenmachines, zoals notebooks, zijn niet toegestaan.

Heel veel succes en maak er wat moois van!

Anne Keune
praeses LIMO 2005

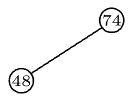
1 Er groeien bomen in onze computers

F.M. Dekking, TU Delft

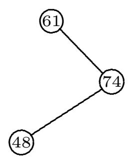
Allerhande pakketjes van gegevens die bewaard worden op de harde schijf van een computer hebben een identificatie, die de *sleutel* heet. Een sleutel is gewoon een (geheel) getal. Wat vaak voorkomt is dat er een heleboel gegevens-pakketjes zijn met elk hun eigen sleutel. Als je een gegevens-pakketje wilt bekijken, dan zoek je het op met behulp van zijn sleutel. Om dat opzoeken snel te laten verlopen zitten de sleutels niet gewoon achter elkaar maar zijn ze in een boomvorm opgeslagen! Het probleem is om een rijtje van (verschillende) sleutels op een slimme manier op te slaan. Dit gebeurt met een *vaste* regel die voor elk mogelijk rijtje van sleutels vertelt hoe de vorm van de bijbehorende boom is. Wat is bijvoorbeeld de boom die hoort bij het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36?

Dit gaat als volgt. De boom heeft *takken* die we als streepjes voorstellen, en *vertakkingspunten* die we als rondjes voorstellen. De sleutels worden *in* de vertakkingspunten gezet. Er is een bijzonder vertakkingspunt: de *wortel*. Hierin wordt de eerste sleutel gezet, de sleutel die vooraan staat in het rijtje. Dus voor het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36 begint de boom met:

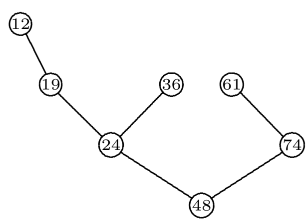
De eerste sleutel, 48, is in de wortel gezet. Nu pakken we de tweede sleutel, 74. Omdat 74 *groter* is dan 48 gaat de boom naar *rechts* omhoog: er komt een tak uit de wortel die naar rechts groeit, en sleutel 74 wordt in het nieuwe vertakkingspunt gezet:



De derde sleutel is 61. Deze komt binnen bij de wortel, en gaat naar rechts omdat hij *groter* is dan de 48 die in de wortel staat. Vervolgens gaat hij naar *links* omhoog, omdat hij *kleiner* is dan de 74 die in het vertakkingspunt staat:



Als we zo doorgaan ontstaat de volgende boom met sleutels:

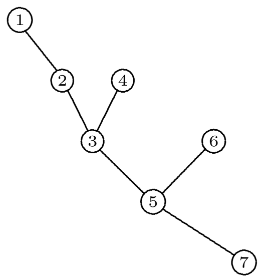


De vaste regel die gebruikt is luidt: “Als groter, dan naar rechts, als kleiner dan naar links, tot je een vrije plek vind.”

Merk op dat de precieze waarden van de sleutels er niet toe doen: in plaats van het rijtje 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36 hadden we ook het rijtje 5, 7, 6, 3, 2, 1, 4 kunnen nemen — de boom had precies dezelfde vorm gekregen.

Om te oefenen: maak de boom die bij het rijtje 7, 5, 6, 3, 2, 1, 4 hoort.

Antwoord:



Bij de opgaven die hier onder volgen, speelt een interessante eigenschap van een boom de hoofdrol, namelijk zijn *hoogte*. Een boom die alleen uit een wortel bestaat heeft hoogte 0. De boom die hoort bij de oefening hierboven heeft hoogte 4.

a. Bedenk een rijtje met 7 sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 6 heeft, en een rijtje met 7 sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 2 heeft.

Merk op dat er verschillende rijtjes zijn die tot *dezelfde* boom leiden. We maken de bomen stochastisch door uniform te trekken uit de mogelijke permutaties van rijtjes van n sleutels. Dan wordt de hoogte H_n van de boom een stochastische variabele. Bijvoorbeeld: $\mathrm{P}(H_3 = 1) = \frac{1}{3}$ en $\mathrm{P}(H_3 = 2) = \frac{2}{3}$ (ga na!).

b. Bewijs, door afschatten zonder $\mathrm{P}(H_n = n-1)$ uit te rekenen, dat $\mathrm{P}(H_n = n-1) \to 0$ als $n \to \infty$.

c. Bereken $\mathrm{P}(H_n = n-1)$.

Nogal verrassend is het volgende. Met behulp van de moderne kansrekening kan aangetoond worden dat als $n \to \infty$, dat dan bijna alle bomen die door die rijtjes gemaakt worden min of meer *dezelfde* vorm hebben.

d. Wat denk je: zal die vorm zijn “iel en nogal hoog”, of is die vorm “compact en nogal laag”? (Je kunt deze vraag nog goed gemotiveerd beantwoorden door een ‘hoger’ standpunt in te nemen).

2 Reële getallen

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

In de negentiende eeuw zagen wiskundigen in dat zelfs intuïtief volkomen voor de hand liggende resultaten als de middelwaardestelling (als een continue reëelwaardige functie f op het interval $[0,1]$ voldoet aan $f(0) < 0$ en $f(1) > 0$, dan heeft f een nulpunt in $[0,1]$) niet bewezen konden worden zonder een goed begrip van de reële getallen. Dit leidde in de tweede helft van de negentiende eeuw tot een groot aantal pogingen de reële getallen te definiëren. Hiertoe bleek het verzamelingbegrip van Cantor noodzakelijk, en deze pogingen culmineerden in de definitie van Hilbert uit 1900, die nog steeds als basis van de analyse geldt.

Let op: een *definitie* is iets anders dan een *constructie*! Bij een constructie van de reële getallen $\mathbb{R}$ moet men denken aan verhalen over Cauchy-completering van $\mathbb{Q}$, of aan Dedekind-sneden van $\mathbb{Q}$. Dergelijke constructies stellen de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ voorop in de wiskunde, en construeren daaruit $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, en ten slotte dus $\mathbb{R}$. In de aanpak van Hilbert daarentegen *begint* de analyse met een definitie van $\mathbb{R}$, en zijn bijvoorbeeld de natuurlijke getallen een daaruit afgeleid begrip.

Hier is de definitie van Hilbert:

Definitie. *De reële getallen $\mathbb{R}$ vormen een lichaam dat totaal geordend is onder een ordening $\leq$, zodanig dat $x \leq y$ impliceert $x + z \leq y + z$ voor alle z alsmede $x \cdot z \leq y \cdot z$ voor alle z met $0 \leq z$. Dit totaal geordende lichaam voldoet aan de volgende eigenschap:*

Volledigheidsaxioma van Dedekind. *Als $X \subset \mathbb{R}$ and $Y \subset \mathbb{R}$ beide niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn met de eigenschap dat $x \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$, dan is er een $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $x \leq c \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$.*

Er kan aangetoond worden dat $\mathbb{R}$ op isomorfie na uniek is: als $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}'$ twee totaal geordende lichamen zijn die voldoen aan het volledigheidsaxioma van Dedekind, dan is er een uniek lichaamsisomorfisme $\mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ dat de ordening bewaart.

a. Leid uit Hilberts definitie van $\mathbb{R}$ het **lemma van Cauchy–Cantor** af: *de doorsnede $\cap_n I_n$ van een aftelbare verzameling niet-lege, gesloten intervallen $I_n \subset \mathbb{R}$ met de eigenschap $I_{n+1} \subset I_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ is niet leeg.*

Een *limietpunt* van een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ is een punt $c \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor iedere $\varepsilon > 0$ de doorsnede $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap X$ oneindig veel punten van X bevat. Een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ heet *begrensd* als er $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $a \leq x \leq b$ voor alle $x \in X$.

b. Leid uit het lemma van Cauchy–Cantor de **stelling van Bolzano–Weierstrass** af: *iedere oneindige begrensde deelverzameling $X \subset \mathbb{R}$ heeft een limietpunt.*

c. Laat zien dat (gegeven het eerste deel van Hilberts definitie van $\mathbb{R}$) de stelling van Bolzano–Weierstrass equivalent is met het volledigheidsaxioma van Dedekind. Gegeven opgave b moet dus nog worden bewezen dat de stelling van Bolzano–Weierstrass het bewuste axioma impliceert.

3 Verpleeghuis Avondrood

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

In verpleeghuis Avondrood heeft men te kampen met een nijpend tekort aan personeel. Er zijn N bewoners die elke 24 uur M soorten verzorging behoeven (wassen, aankleden, eten, etc.) die voor het personeel evenzovele taken omvatten. Voor bewoner j vereist taak i een tijd t_{ij} van een verzorger $(i = 1, \ldots, M; j = 1, \ldots, N)$. Er zijn in totaal Q verzorgers werkzaam in Avondrood, die elk uiteraard aan slechts één taak tegelijk kunnen werken. Voor elke taak geldt een tijdvenster $[a_i, b_i]$ waarbinnen taak i voor *alle* bewoners moet worden uitgevoerd. De tijdvensters voor de verschillende taken zijn paarsgewijs disjunct $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_M < b_M)$. Verschillende taken voor één bewoner kunnen eventueel door verschillende verzorgers worden uitgevoerd. Elk personeelslid werkt regulier 8 uur per etmaal. Uiteraard geldt voor elke taak i,

$$\max\{t_{ij} : 1 \leq j \leq N\} \leq b_i - a_i \quad \text{en} \quad \frac{\sum_{j=1}^{N} t_{ij}}{Q} \leq b_i - a_i,$$

omdat het anders fysiek al niet mogelijk is alle bewoners de volledige verzorging te geven. Het personeelstekort komt tot uiting door het gegeven dat

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} t_{ij} > 8Q,$$

in woorden, de totale tijd nodig voor het verzorgen van de bewoners is groter dan het totaal aantal uren reguliere (echte) werktijd dat met Q personeelsleden per etmaal beschikbaar is. Omdat het niet mogelijk blijkt meer personeel te vinden, en men 'pyjamadagen' wil voorkomen, zal elke verzorger een aantal uur per dag moeten overwerken om al het noodzakelijke werk gedaan te krijgen. De directie van Avondrood vraagt nu aan elke verzorger hoeveel uur hij/zij *maximaal* bereid is per dag over te werken voor de goede zaak. Voor verzorger k blijkt dit u_k uur te zijn $(k = 1, \ldots, Q)$. De volgende vraag is òf en hoe een werkschema kan worden opgesteld waarin voor elke verzorger precies wordt voorgeschreven voor wie hij/zij welke taak moet uitvoeren. Men streeft er hierbij naar de totale tijd besteed aan overwerk te minimaliseren. Er zij nog opgemerkt dat in huize Avondrood de goede gewoonte bestaat dat na het voltooien van een taak de verzorger *altijd* nog enige tijd sociaal contact onderhoudt met de bewoner. Deze tijd ligt altijd buiten het tijdvenster van de voltooide taak, maar wordt in onze zakelijk ingestelde samenleving wel als werktijd beschouwd, en mag ook niet plaatsvinden binnen het tijdvenster voor een andere taak. Precies gezegd, sociaal contact na uitvoering taak i vindt plaats in het tijdsinterval $[b_i, a_{i+1}]$ $(a_{M+1} = a_1$ van de volgende dag!). De tijd voor sociaal contact na taak i tussen verzorger k en bewoner j bedraagt altijd c_{ijk} (hier wordt de persoonlijke relatie tussen bewoner en verzorger zichtbaar!). Merk op dat als een verzorger bijvoorbeeld 3 bewoners geholpen heeft bij taak i hem/haar dit drie *na elkaar* af te werken sociale contacten 'kost'. Tenslotte, (koffie)pauzes e.d. worden *niet* als werktijd beschouwd.

a. Formuleer het probleem van het vinden van een werkschema met minimale totale overwerktijd nu als een gemengd lineair/geheeltallig programmeringsprobleem.

Nadat men het optimale werkschema heeft berekend blijkt het personeel zeer ontevreden te zijn, terwijl toch aan de genoemde wensen voldaan is.

b. Verklaar waarom het personeel zeer ongelukkig zou kunnen zijn met het 'optimale' werkschema.

De vraag is vervolgens hoe we via extra bijvoorwaarden het personeel wel een acceptabel werkschema kunnen geven. De directie deelt daartoe een etmaal op in drie keer 8 uur (1=dagdienst, 2=avonddienst en 3=nachtdienst). Verder zoekt de directie uit welke taken in de diverse diensten kunnen worden uitgevoerd. Laat $T_d \subset \{1, 2, \ldots, M\}$ de collectie taken zijn die (inclusief sociaal contact na afloop) in een d-dienst (plus 'aansluitend' overwerk!) redelijkerwijs zijn uit te voeren ($d = 1, 2, 3$).

c. Voeg nu de bijvoorwaarden toe die tegemoet komen aan de bezwaren van de oplossing van onderdeel (a).

4 Periodieke functies

R. Tijdeman, Universiteit Leiden

We beschouwen functies $f\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\}$. We noemen de functie f *periodiek* als er een geheel getal $p > 0$ bestaat zó dat $f(n+p) = f(n)$ voor alle n groter dan een zeker getal N. We definiëren $P(m, f)$ als het aantal verschillende vectoren

$$(f(n+1), f(n+2), f(n+3), \ldots, f(n+m))$$

dat je krijgt als n de gehele getallen doorloopt.

a. Bewijs: als het beeld van f zowel nullen, enen als tweeën bevat en er bestaat een positief geheel getal m zó dat $P(m, f) \leq m + 1$, dan is f periodiek.

b. Bewijs: er bestaat een f waarvan het beeld zowel nullen, enen als tweeën bevat, zó dat f niet periodiek is en voor elk positief geheel getal m geldt dat $P(m, f) = m + 2$.

   Aanwijzing: Je kunt het volgende bewijzen en gebruiken:
   Schrijf $\{x\}$ voor het fractionele deel van x, dat is de rest bij deling door 1. Beschouw voor een irrationaal getal $a \in (0, 1)$ de functie $f\colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ gegeven door $f(n) = 0$ als $\{na\} \in [0, a)$, $f(n) = 1$ als $\{na\} \in [a, 1)$. Bewijs dat f niet periodiek is en voor elke m voldoet aan $P(m, f) = m + 1$.

Mathematisch Instituut

5 Dammen

R. Tijdeman, Universiteit Leiden

We beschouwen damborden met stukken erop. De situatie geven we aan met een functie $f\colon \{1,2,\ldots,10\} \times \{1,2,\ldots,10\} \to \{0,1\}$, waarbij de functiewaarde 1 is als er wel een stuk op het veld staat en 0 anders. We noteren het aantal stukken op de i-de rij met r_i, dus $r_i := \sum_{j=1}^{10} f(i,j)$ voor $i = 1,2,\ldots,10$. Analoog noteren we de kolomsommen als $k_j := \sum_{i=1}^{10} f(i,j)$ voor $j = 1,2,\ldots,10$ en de diagonaalsommen als $d_h := \sum_{i+j=h} f(i,j)$ voor $h = 2,\ldots,20$.

a. Geef twee verschillende opstellingen die dezelfde rijsommen, kolomsommen en diagonaalsommen hebben.

b. De sommen zijn niet onafhankelijk. Zo is evident dat

$$\sum_{j=1}^{10} r_j = \sum_{i=1}^{10} k_i = \sum_{h=2}^{20} d_h.$$

Er is nog een hiervan onafhankelijke lineaire relatie tussen de rijsommen, kolomsommen en diagonaalsommen. Geef zo'n relatie.

"God does not care about our mathematical difficulties; He integrates empirically."
"I don't believe in mathematics."
"Do not worry about your difficulties in mathematics, I assure you that mine are greater."
"As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality."
—Albert Einstein

6 Modulorekenen

F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

Bepaal de natuurlijke getallen m waarvoor er een natuurlijk getal $k > 1$ is met de eigenschap dat tot de macht k verheffen een permutatie van de restklassen van gehele getallen modulo m induceert.

KNAW

7 Verdwijnpunten

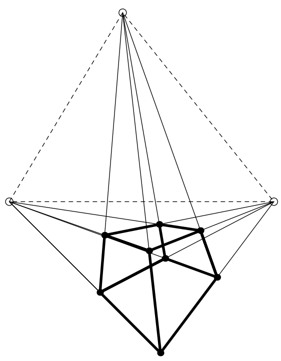
F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

We beschouwen een perspectivische afbeeldingen van rechthoekige blokken op een plat vlak V. Een rechthoekig blok is een begrensd deel van de 3-dimensionale ruimte dat begrensd wordt door zes zijden die twee aan twee evenwijdig zijn en verder loodrecht op elkaar staan; de lijnen waar de zijden elkaar ontmoeten noemen we de ribben. Deze zijn dus vier aan vier evenwijdig en verder loodrecht. Een perspectivische afbeelding van zo'n rechthoekig blok C op een vlak V is een projectie van de ribben van C, vanuit een punt P buiten V, op het vlak V. We nemen voor de eenvoud aan dat geen van de ribben van C evenwijdig is aan V. In V hebben we dan drie verdwijnpunten. Deze worden als volgt gedefinieerd: de ribben van C zijn vier aan vier evenwijdig. De projecties van zo'n viertal geeft lijnsegmenten in V die, bij verlenging, door één punt gaan. Dat punt noemt men het (bij de richting van die ribben horende) verdwijnpunt. Op die manier zijn er dus drie verdwijnpunten behorende bij de drie loodrechte richtingen van de ribben van C.

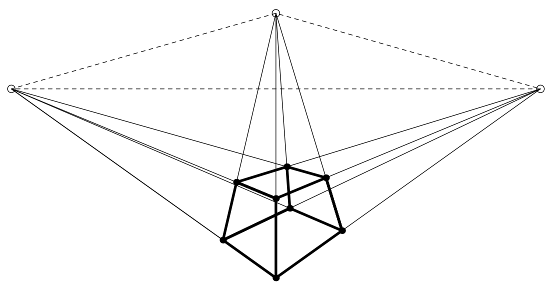
In *figuur 1* geven we zo'n perspectivische projectie met z'n verdwijnpunten. *Figuur 2* is in principe op dezelfde manier geconstrueerd, maar nu kan het resultaat niet verkregen worden als de perspectivische projectie van een rechthoekig blok.

In onderstaande figuren geldt:

- Verdwijnpunten zijn aangegeven met $\circ$
- De projecties van de ribben zijn dik getekend
- De verlengingen tot de verdwijnpunten zijn dun getekend



Figuur 1



Figuur 2

Laat zien dat zo'n plaatje afkomstig is van de projectie van een rechthoekige balk dan en slechts dan als de driehoek gevormd door de verdwijnpunten alleen scherpe hoeken heeft.


“MEDE DANKZIJ HET UNIVERSITEITSFONDS”
Geen dank. Daar zijn wij voor.
Voor het helpen realiseren van activiteiten
als deze bijvoorbeeld.
Zo komt met een financiële ruggesteun van het Leids Universiteits Fonds menig initiatief van de grond.
Duizenden donateurs - met name afgestudeerden van de Universiteit Leiden - stellen ons daartoe in staat.
Onze vraag: U wordt toch ook één van hen?
LUGDUNO BATAVA LIBERTATIS PRAESIDIUM ACADEMIA
15 75
Leids Universiteits Fonds
Rapenburg 61
2311 GJ Leiden
telefoon: 071 - 513 05 03
e-mail: info@luf.leidenuniv.nl
www.luf.nl

8 Eigenwaarden

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Notatie:

- Alle vectoren zijn kolomvectoren.
- Voor $\mathbb{R}^{n\times k} \ni A = (a_{ij})$ is $A^T \in \mathbb{R}^{k\times n}$ en elementen van A^T zijn a_{ji}.

Beschouw een stelsel lineaire vergelijkingen

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n,$$

waar de vector $\boldsymbol{x}$ moet worden bepaald voor een gegeven matrix A en vector $\boldsymbol{b}$. In aantal belangrijke fysische toepassingen komen we lineaire stelsels tegen met matrices A die antisymmetrisch zijn (dus $A = -A^T$). Het is dan niet de bedoeling dat de matrix A singulier is want we willen dat het stelsel oplosbaar is voor alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$.

Voor welke $n \in \mathbb{N}$ (n is een groot getal) kun je zeker zeggen dat een antisymmetrische matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ minstens één eigenwaarde gelijk aan nul heeft?

9 Kansrekening en Stochastiek

A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit

Om de genealogische relatie tussen verschillende individuen te simuleren, wordt vaak gebruik gemaakt van *Hoppe's urn model*. Deze opgave gaat over dit urn model.

Op tijdstip 0 bevat een vaas 1 zwarte bal met massa $\theta > 0$. Op elk volgend tijdstip bevat de vaas 1 zwarte bal met massa θ en een aantal gekleurde ballen met massa 1. Op elk tijdstip trekken we een bal met kansen proportioneel met haar massa. Als we een gekleurde bal trekken, dan doen we die bal, plus een nieuwe bal van dezelfde kleur terug in de vaas. Als we de zwarte bal trekken, dan doen we die weer terug, plus een bal met een geheel nieuwe kleur.

Op tijdstip n bevat de vaas dus n gekleurde ballen plus de zwarte bal. Laat nu K_n het aantal kleuren zijn op tijdstip n.

a. Laat zien dat

$$\frac{E(K_n)}{\theta \ln(n)} \to 1,$$

als $n \to \infty$. Hierbij stelt $E(K_n)$ de verwachting van K_n voor.

b. Laat zien dat

$$\frac{\mathrm{Var}(K_n)}{\theta \ln(n)} \to 1,$$

als $n \to \infty$, waarbij $\mathrm{Var}(K_n)$ de variantie van K_n voorstelt.

Laat nu $A_{k,n}$ het aantal kleuren zijn dat k keer voorkomt, op tijdstip n. Als we op tijdstip 5 bijvoorbeeld drie rode en twee gele ballen hebben, dan is $A_{2,5} = 1$ en $A_{3,5} = 1$. Merk op dat $\sum_{k=1}^{n} kA_{k,n} = n$.

c. Bewijs met volledige inductie naar n dat

$$P\left(A_{1,n} = a_1, \ldots, A_{n,n} = a_n\right) = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^{n} \frac{(\theta/j)^{a_j}}{a_j!},$$

waarbij $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)$.

We kunnen de beschrijving van Hoppe's model verbinden met *permutaties*. Elke realisatie koppelen we aan een permutatie van $\{1, 2, \ldots, n\}$, genoteerd in haar cyclische decompositie. Hiertoe nummeren we de gekleurde ballen in de volgorde waarin ze in de vaas terechtkomen. Wanneer we nu de zwarte bal trekken, dan beginnen we een nieuwe cykel. Wanneer de k-de kleur bepaald wordt door bal j te kiezen, dan voegen we nummer k in links van nummer j. Ter verduidelijking geven we een voorbeeld. Stel we maken 5 stappen waarbij op de tijdstippen 1, 2, en 4 de zwarte bal wordt gekozen, en waarbij op de tijdstippen 3 en 5 de bal met nummer 2 wordt gekozen. Dit leidt tot de volgende serie:

$$\begin{array}{r}(1)\\(1)(2)\\(1)(32)\\(1)(32)(4)\\(1)(352)(4)\end{array}$$

d. Laat zien dat de kans op bovenstaande realisatie gelijk is aan $\theta^3/\theta_{(5)}$.

e. Laat zien dat

$$P(K_n = k) = \frac{\theta^k}{\theta_{(n)}} \cdot S_{k,n},$$

waarbij $S_{k,n}$ het aantal permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ voorstelt met precies k cykels.

Stel nu dat θ onbekend is, en dat we deze θ willen schatten op basis van de observatie dat $K_n = k$. We kunnen dat doen door die θ te zoeken die $P(K_n = k)$ maximaliseert. (Dit is de ”methode van de meest aannemelijke schatter”.)

f. Laat zien dat dit voor $k < n$ leidt tot de waarde van θ die voldoet aan

$$k = \frac{\theta}{\theta} + \frac{\theta}{\theta + 1} + \cdots + \frac{\theta}{\theta + n - 1}.$$

Veronderstel nu dat we behalve K_n ook $(A_{1,n}, \ldots, A_{n,n})$ observeren. We willen deze informatie gebruiken voor het schatten van θ. We kunnen dezelfde methode van de meest aannemelijke schatter gebruiken.

g. Laat zien dat dit tot dezelfde schatting als onder (f) leidt.

“A mathematician is a device for turning coffee into theorems.”
—Paul Erdős

10 Saaie afbeeldingen

J.G.M. Donkers, TU Eindhoven

Laat S een eindige verzameling zijn met m elementen. Voor een afbeelding $f : S \to S$ bekijken we de samengestelde afbeeldingen $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, enz. Een afbeelding f heet saai als er een n is zodat $f^n = f^{(n+1)}$.

Bepaal het aantal saaie f's (als functie van m).

"I've dealt with numbers all my life, of course, and after a while you begin to feel that each number has a personality of its own. A twelve is very different from a thirteen, for example. Twelve is upright, conscientious, intelligent, whereas thirteen is a loner, a shady character who won't think twice about breaking the law to get what he wants. Eleven is tough, an outdoorsman who likes tramping through woods and scaling mountains; ten is rather simpleminded, a bland figure who always does what he's told; nine is deep and mystical, a Buddha of contemplation...."

—Paul Auster, The Music of Chance

Aleph-null bottles of beer on the wall,
Aleph-null bottles of beer,
You take one down, and pass it around,
Aleph-null bottles of beer on the wall.

Theorem. A cat has nine tails.
Proof. No cat has eight tails. A cat has one more tail than no cat. Therefore a cat has nine tails.

Top Five Excuses for Not Doing Homework:

- I could only get arbitrarily close to my textbook. I couldn't actually reach it.
- I have the proof, but there is no room to write it in this margin.
- I was watching the World Series and got tied up trying to prove that it converged.
- I locked the paper in my trunk, but a four-dimensional dog got in and ate it.
- I couldn't figure out whether i am the square root of negative one or i is the square root of negative one.
- I could have sworn I put the homework inside a Klein bottle, but this morning I couldn't find it.

Q: Why did the chicken cross the Möbius strip?
A: To get to the same side.

Q: How many mathematicians does it take to replace a lightbulb?
A: 0.999999...

Q: How many analysts does it take to replace a lightbulb?
A: Three. One to prove existence, one to prove uniqueness, and one to derive a nonconstructive algorithm to do it.

Q: How many Bourbakists does it take to replace a lightbulb?
A: Changing a lightbulb is a special case of a more general theorem concerning the maintenance and repair of an electrical system. To establish upper and lower bounds for the number of personnel required, we must determine whether the sufficient conditions of Lemma 2.1 (Availability of personnel) and those of Corollary 2.3.55 (Motivation of personnel) apply. If and only if these conditions are met, we derive the result by an application of the theorems in Section 3.1123. The resulting upper bound is, of course, a result in an abstract measure space, in the weak-* topology.

Dankwoord

Deze eerste LIMO is tot stand gekomen met de hulp van vele instellingen en individuen. Ten eerste willen wij graag alle sponsoren en adverteerders bedanken voor hun financiële bijdrage en voor hun vertrouwen in deze eerste LIMO. Het comité van aanbeveling bedanken we voor hun steun bij het vinden van sponsoren. Wij bedanken de opgavenmakers en nakijkers voor de uitdagende opgaven, de antwoorden en de tijd die ze voor ons hebben vrijgemaakt. Verder gaat onze dank uit naar prof. dr. Jan Hogendijk voor zijn lezing en prof. dr. Lodewijk Kallenberg voor de prijsuitreiking. Ook bedanken we De Leidsche Flesch voor de ondersteuning bij de organisatie en alle vrijwilligers die zo hard hebben meegewerkt om LIMO 2005 een succes te maken. Tevens willen we alle deelnemers bedanken. Zonder jullie had deze dag geen succes kunnen worden; we hopen dat jullie van een leerzame en gezellige dag genieten. Tenslotte willen we allen bedanken voor de tijd en moeite die ze in deze LIMO hebben gestopt.

Namens de organisatie van LIMO 2005,
Anne Keune
Praeses LIMO 2005

Comité van aanbeveling

- Prof. dr. D.D. Breimer, rector magnificus Universiteit Leiden
- Prof. dr. F.W. Saris, decaan Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universiteit Leiden
- Prof. dr. W.J.M. Levelt, oud-president KNAW
- Prof. dr. L.C.M. Kallenberg, hoogleraar-directeur LNMB

Sponsoren

- Leids Universiteits Fonds
- Koninklijk Wiskundig Genootschap
- Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
- Thomas Stieltjes Institute for Mathematics
- ING
- Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
- Mathematical Research Institute
- Mathematisch Instituut Leiden

Adverteerders

- Universiteit Leiden
- TU Eindhoven
- Radboud Universiteit Nijmegen

Thomas Stieltjes Institute for Mathematics

Thomas Joannes Stieltjes (1856-1895)

The Thomas Stieltjes Institute for Mathematics is a Dutch research institute in mathematics and has a research training programme for Ph.D. students. It carries out research in four main areas of fundamental and applied mathematics:

- Algebra & Geometry
- Analysis
- Stochastics
- Operation Research

In the Institute participate:

- University of Amsterdam (UvA)
- Free University Amsterdam (VUA)
- Delft University of Technology (TUD)
- Eindhoven University of Technology (TUE)
- University of Leiden (UL)
- Tilburg University (UvT)

The Institute collaborates with:

- the Centre for Mathematics and Computer Science (CWI) in Amsterdam
- the European Institute for the Study of Randomness (EURANDOM) in Eindhoven.

http://www.stieltjes.org/

E-mail: stieltjes@math.leidenuniv.nl

MSc Mathematics

- Algebra, geometry and number theory; part of the ALGANT program Leiden-Bordeaux-Padova.
- Applied mathematics; part of the Leiden BioScience Initiative.
- Science-Based Business, Education, Communication.

Master’s degree in Math?

Leiden offers tailor-made programs and personal instruction.

Contact Martin Lübke
(071) 527 7110
lubke@math.leidenuniv.nl
www.math.leidenuniv.nl

Universiteit Leiden